

WÄRMEÜBERGANG UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER REIBUNGSWÄRME BEI LAMINAREN KEIL- STRÖMUNGEN MIT VERÄNDERLICHER TEMPERATUR UND NORMALGESCHWINDIGKEIT ENTLANG DER WAND†

K. GERSTEN und H. KÖRNER

Institut für Aerodynamik der Deutschen Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFL), Braunschweig

(Eingegangen 16 Mai 1967)

Zusammenfassung— Es wird die inkompressible laminare Grenzschicht für die Aussenströmung $U(x) = u_1 x^m$ ($-1 \leq m < \infty$) mit Absaugen und Ausblasen betrachtet. Unter Berücksichtigung der Reibungswärme wird für die Wandtemperatur-Verteilung $T_w(x) - T_\infty = T_r x^n$ die Wärmestromdichte an der Wand $q(x, m, C, n, Pr, Ec)$ berechnet, wobei C ein Mass für die Normalgeschwindigkeit an der Wand ($C > 0$ Absaugen; $C < 0$ Ausblasen), Pr die Prandtl-Zahl und $Ec = u_1^2/c_p T_n$ die Eckert-Zahl sind. Neben zahlreichen numerischen Lösungen werden insbesondere auch asymptotische Berechnungsformeln für die Grenzfälle kleiner und grosser Prandtl-Zahlen gegeben. Die Bedeutung des Recovery-Faktors für veränderliche Wandtemperatur wird diskutiert. Auf den Sonderfall $n = 2m$, bei dem auch die Lösungen des Temperaturfeldes ähnlich sind, wird genauer eingegangen. Für $m = -1$ erfolgt im Anhang eine Sonderbehandlung.

BEZEICHNUNGEN		m , Exponent der Geschwindigkeitsverteilung längs der Wand nach Gleichung (5);
a ,	Temperaturleitfähigkeit ($a = \lambda/c_p \rho$);	n , Exponent der Temperaturverteilung längs der Wand nach Gleichung (4);
C ,	Parameter für Absaugung ($C > 0$) bzw. Ausblasung ($C < 0$) an der Wand nach Gleichung (4);	Nu_x , Nusselt-Zahl [$Nu_x = qx/\lambda(T_w - T_\infty)$];
c_p ,	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck;	q , Wärmestromdichte an der Wand [$q = -\lambda(dT/dy)_w$];
f ,	dimensionslose Stromfunktion nach Gleichung (7);	Pr , Prandtl-Zahl ($Pr = v/a$);
g ,	dimensionslose Stromfunktion nach Gleichung (79);	Re_x , Reynoldszahl ($Re_x = Ux/v$);
Ec ,	Eckert-Zahl ($Ec = u_1^2/c_p T_n$);	r , Recovery-Faktor nach Gleichung (26);
Ec^* ,	Eckert-Zahl für verschwindenden Wärmeübergang an der Wand;	r_{eff} , effektiver Recovery-Faktor nach Gleichung (30);
F_I, F_{II} ,	Temperaturgradienten an der Wand nach Gleichung (18);	T , Temperatur in der Grenzschicht;
k ,	Parameter für die Absaugung ($k > 0$) an der Wand nach Gleichung (80);	T_e , Eigentemperatur nach Gleichung (25);
		T_n , Konstante nach Gleichung (4);
		T_n^* , Konstante nach Gleichung (23);
		T_w , Wandtemperatur;
		T_∞ , Freistrom-Temperatur;
		U , Geschwindigkeit in der Aussenströmung nach Gleichung (5);

† Aus dem Institut für Aerodynamik (Leiter: Prof. Dr. H. Schlichting) der Deutschen Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFL), Braunschweig, Deutschland.

u ,	Geschwindigkeit in der Grenzschicht parallel zur Wand;	Vernachlässigung der Reibungswärme und (2) Berechnung der Eigentemperatur. Dabei ist die Eigentemperatur als diejenige Wandtemperatur definiert, für die bei Berücksichtigung der Reibungswärme der Wärmestrom Null wird (adiabatische Wandtemperatur). Die Differenz von Eigentemperatur und Freistromtemperatur, bezogen auf $U_\infty^2/2c_p$, wobei U_∞ die Anströmgeschwindigkeit und c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck sind, wird als Recovery-Faktor $r = (T_e - T_\infty)/(U_\infty^2/2c_p)$ bezeichnet. Seine Berechnung ist gleichbedeutend mit der Bestimmung der Eigentemperatur. Bei der längsangeströmten ebenen Platte ist der Recovery-Faktor stets positiv. Das gilt auch dann, wenn die Normalgeschwindigkeit an der Wand von Null verschieden und proportional $x^{-\frac{1}{2}}$ ist (Absaugen oder Ausblasen). Dabei sind hier Fälle mit Rückströmung aus der Betrachtung ausgeschlossen.
u_1 ,	Konstante nach Gleichung (5);	
v ,	Geschwindigkeit in der Grenzschicht senkrecht zur Wand;	
v_w ,	Ausblasegeschwindigkeit an der Wand;	
x ,	Koordinate längs der Wand (siehe Bild 1);	
y ,	Koordinate senkrecht zur Wand (siehe Bild 1).	
β ,	Mass für den Keilwinkel [siehe Bild 1; $\beta = 2m/(m + 1)$];	
$\Gamma(b)$,	vollständige Gammafunktion;	
$\eta, \bar{\eta}$,	Aehnlichkeitsvariable nach Gleichung (7) bzw. Gleichung (78);	
ϑ ,	dimensionslose Temperaturfunktion nach Gleichung (12);	
$\vartheta_b, \vartheta_{b_1}$,	dimensionslose Temperaturfunktionen nach Gleichung (15);	
λ ,	Wärmeleitfähigkeit;	
v ,	kinematische Zähigkeit;	
ρ ,	Dichte;	
ψ ,	Stromfunktion nach Gleichung (6).	

Indizes

W ,	Zustand an der Wand;
∞ ,	Zustand in der Aussenströmung.

1. EINLEITUNG

BEKANNTLICH gilt für den Wärmestrom an einer längsangeströmten ebenen Platte von konstanter Temperatur in inkompressibler Strömung folgendes, vergl. [1]: Wird die Reibungswärme vernachlässigt, ist der Wärmestrom proportional zur Differenz zwischen Freistromtemperatur T_∞ und Wandtemperatur T_w . Bei Berücksichtigung der Reibungswärme gilt für den Wärmestrom die gleiche Formel, jedoch tritt anstelle der Differenz zwischen Freistromtemperatur und Wandtemperatur dann die Differenz zwischen der sogenannten Eigentemperatur T_e und der Wandtemperatur. Die Berechnung des Wärmestromes erfolgt demnach in zwei Schritten: (1) Berechnung des Wärmestromes bei

Im folgenden soll der Wärmeübergang unter Berücksichtigung der Reibungswärme für Fälle untersucht werden, bei denen sich sowohl die Geschwindigkeit $U(x)$ der Aussenströmung als auch die Wandtemperatur $T_w(x)$ längs der Wand ändern. Insbesondere soll dabei untersucht werden, ob sich der von der längsangeströmten ebenen Platte her geläufige Begriff der Eigentemperatur verallgemeinern lässt, so dass sich die Berechnung des Wärmeüberganges wieder wie bei der längsangeströmten ebenen Platte in zwei Schritten durchführen lässt, nämlich Berechnung des Wärmeüberganges ohne Berücksichtigung der Reibungswärme und Berechnung der Eigentemperatur.

Es werden Potenzgesetze sowohl für die Geschwindigkeit der Aussenströmung $U(x) = u_1 x^m$ als auch für die Wandtemperatur $T_w(x) = T_\infty + T_e x^n$ angenommen. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass eine der ersten grundlegenden Arbeiten über Wärmeübergang bei veränderlicher Wandtemperatur von Schlichting [2] stammt.

Es wird sich im folgenden herausstellen, dass eine Verallgemeinerung der Eigentemperatur und damit der Berechnung des Wärmeüber-

ganges analog dem an der längsangeströmten ebenen Platte nur dann möglich ist, wenn zwischen den Exponenten m und n der feste Zusammenhang $n = 2m$ besteht. Für diese Fälle werden dann die Ergebnisse des Wärmeüberganges unter Berücksichtigung der Reibungswärme etwas ausführlicher diskutiert.

2. WÄRMEÜBERGANG FÜR BELIEBIGE EXPONENTEN m UND n

2.1. Allgemeine Lösung

Die Differentialgleichungen für Strömungs- und Temperaturfeld einer zweidimensionalen, stationären, inkompressiblen laminaren Grenzschicht unter Berücksichtigung der Reibungswärme lauten (vergl. Bild 1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{v}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (3)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite von Gleichung (2) entspricht dem Druckgradienten

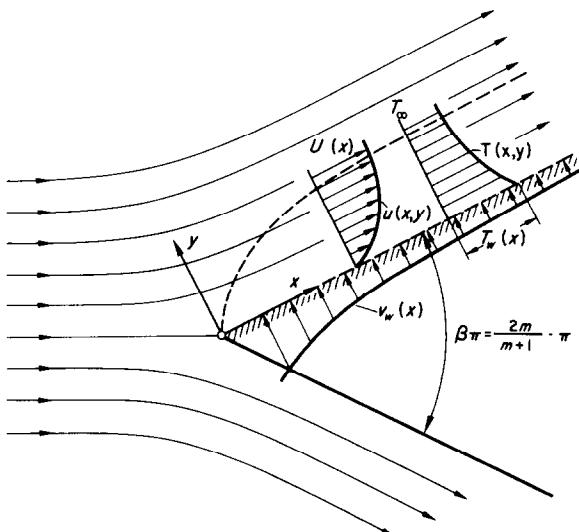


BILD 1. Strömung an einem Keil mit dem Keilwinkel $\beta\pi = [2m/(m+1)]\pi$, Geschwindigkeitsverteilung $U(x) = u_1 x^m$.

der reibungslosen Außenströmung, das zweite Glied auf der rechten Seite von Gleichung (3) stellt die Reibungswärme dar.

Die Lösungen sollen folgende Randbedingungen erfüllen:

$$y = 0: u = 0$$

$$\left. \begin{aligned} v &= v_w(x) = -C \sqrt{\left(\frac{m+1}{2} u_1 v\right)} x^{(m-1)/2} \\ T &= T_w(x) = T_\infty + T_w x^n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \infty: u = U(x) = u_1 x^m \quad (m > -1) \\ T &= T_\infty \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dabei werden die Stoffgrößen a , v und c_p als konstant angenommen. Auf den zunächst ausgeschlossenen Fall $m = -1$ wird im Anhang eingegangen.

Die hier betrachteten Keilströmungen mit den Geschwindigkeitsverteilungen

$$U(x) = u_1 x^m \quad (u_1 > 0)$$

und den angegebenen Verteilungen der Normalgeschwindigkeit an der Wand

$$v_w(x) = -C \sqrt{\left(\frac{m+1}{2} u_1 v\right)} x^{(m-1)/2}$$

führen bekanntlich auf ähnliche Lösungen für das Geschwindigkeitsfeld. Durch Einführen einer Stromfunktion ψ entsprechend

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6)$$

kann die Kontinuitätsgleichung, Gleichung (1), identisch erfüllt werden.

Mit den Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} \eta &= y \sqrt{\left[\frac{m+1}{2} \frac{U(x)}{v x}\right]} \\ f(\eta) &= \psi \sqrt{\left[\frac{2}{m+1} \frac{1}{U(x) x v}\right]} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= U(x) f'(\eta) \\ v(x, y) &= -\sqrt{\left[\frac{2}{m+1} \frac{U(x) v}{x} \right]} \\ &\quad \left[\frac{m+1}{2} f(\eta) + \frac{m-1}{2} \eta f'(\eta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Damit ergibt sich aus der Impulsgleichung (2) die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} f''' + f f'' + \frac{2m}{m+1} (1 - f'^2) &= 0 \\ \text{bzw. } f''' + f f'' + \beta (1 - f'^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

mit den Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: f(0) &= C & f'(0) &= 0 \\ \eta = \infty: & & f'(\infty) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dabei hat

$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad (11)$$

die in Bild 1 skizzierte geometrische Bedeutung.

Bei den Lösungen $f(\eta, m, C)$ der Gleichung (9) handelt es sich um ähnliche Lösungen der Grenzschichtgleichungen. Diese sind vom Temperaturfeld unabhängig und wurden bereits von verschiedenen Autoren berechnet, vergl. [1, 4, 5].

Wird die Energiegleichung, Gleichung (3), vom x, y -System in das x, η -System entsprechend Gleichung (7) transformiert, so kann man nicht erwarten, dass im allgemeinen Fall das Temperaturfeld nur von der Ähnlichkeitsvariablen η allein abhängt. Es ergibt sich vielmehr für die dimensionslose Temperatur

$$\vartheta(x, \eta) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_w(x) - T_\infty} = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_n x^n} \quad (12)$$

die folgende partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} + Pr f \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} - Pr f' \frac{2n}{m+1} \vartheta(x, \eta) \\ = Pr f' \frac{2}{m+1} x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - Pr Ec x^{2m-n} f'^2, \end{aligned} \quad (13)$$

wobei $Pr = \nu/a$ die Prandtl-Zahl und $Ec = u_1^2/c_p T_n$ die Eckert-Zahl bedeuten. Die Randbedingungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: \quad \vartheta(x, 0) &= 1 \\ \eta = \infty: \quad \vartheta(x, \infty) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Lösung von Gleichung (13) erfolgt durch den Ansatz:

$$\vartheta(x, \eta) = \vartheta_I(\eta) + x^{2m-n} Ec \vartheta_{II}(\eta). \quad (15)$$

Daraus ergeben sich für die Funktionen $\vartheta_I(\eta)$ und $\vartheta_{II}(\eta)$ die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_I'' + Pr f \vartheta_I' - \frac{2n}{m+1} Pr f' \vartheta_I &= 0 \\ \eta = 0: \quad \vartheta_I(0) &= 1 \\ \eta = \infty: \quad \vartheta_I(\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{II}'' + Pr f \vartheta_{II}' - \frac{4m}{m+1} Pr f' \vartheta_{II} \\ = - Pr f'^2 \\ \eta = 0: \quad \vartheta_{II}(0) &= 0 \\ \eta = \infty: \quad \vartheta_{II}(\infty) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Bemerkenswert ist, dass Gleichung (17) und damit die Funktion $\vartheta_{II}(\eta)$ von n unabhängig ist. Aus den Lösungen $\vartheta_I(\eta)$ und $\vartheta_{II}(\eta)$ der Gleichungen (16) und (17) und insbesondere aus deren Anstiegen an der Wand

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_I'(0) &= F_I(m, C, Pr, n) \\ \vartheta_{II}'(0) &= F_{II}(m, C, Pr) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

erhält man für den Wärmestrom an der Wand unter Berücksichtigung von Gleichung (7) und Gleichung (12):

$$\left. \begin{aligned} q(x, m, C, Pr, n, Ec) &= - \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \\ &= - \lambda T_n \sqrt{\left(\frac{m+1}{2} \frac{u_1}{v} \right)} x^{(2n+m-1)/2} \\ &\quad \times [\vartheta_I'(0) + x^{2m-n} Ec \vartheta_{II}'(0)] \\ &= - \lambda \frac{T_w(x) - T_\infty}{x} \sqrt{\left[\frac{m+1}{2} \frac{U(x) x}{v} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \times \left[F_I + \frac{U^2(x)}{c_p(T_w(x) - T_\infty)} F_{II} \right] \right\} \quad (19)$$

Daraus lässt sich wie folgt eine örtliche Nusselt-Zahl bilden:

$$\begin{aligned} Nu_x &= \frac{q(x) x}{\lambda(T_w(x) - T_\infty)} \\ &= - \sqrt{\left[\frac{m+1}{2} \frac{U(x) x}{v} \right]} \\ &\quad \times \left[F_I + \frac{U^2(x)}{c_p(T_w(x) - T_\infty)} F_{II} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

oder schliesslich mit $Re_x = \frac{U(x) x}{v}$

$$\begin{aligned} \frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} &= - \sqrt{\left(\frac{m+1}{2} \right)} \left[F_I + \frac{U^2(x)}{c_p(T_w(x) - T_\infty)} F_{II} \right] \\ &= - \sqrt{\left(\frac{1}{2 - \beta} \right)} \left[F_I \right. \\ &\quad \left. + \frac{U^2(x)}{c_p(T_w(x) - T_\infty)} F_{II} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Nach Gleichung (19) hängt der Wärmestrom an der Wand in komplizierter Weise von der Längskoordinate x ab. Der Wärmestrom verschwindet im allgemeinen Fall nur an einer bestimmten Stelle x , wenn nämlich die eckige Klammer in Gleichung (19) Null wird.

Die eckige Klammer in Gleichung (19) und damit der Wärmestrom $q(x)$ an der Wand kann nur dann für alle x -Werte gleichzeitig verschwinden, wenn die Bedingung

$$2m - n = 0 \quad (22)$$

erfüllt ist. In diesem Fall muss die Eckert-Zahl einen ganz bestimmten kritischen Wert

$$Ec^* = \frac{u_1^2}{c_p T_n^*} \quad (23)$$

annehmen. Die Gleichung

$$F_I + Ec^* F_{II} = 0 \quad (24)$$

kann als Bestimmungsgleichung für Ec^* auf-

gefasst werden. Die dazugehörige Wandtemperaturverteilung, für die der Wärmeübergang an die Wand für alle x -Werte verschwindet, kann als Eigentemperaturverteilung

$$T_e(x) - T_\infty = T_n^* x^n \quad (25)$$

bezeichnet werden. Damit lässt sich der Recovery-Faktor r definieren als:

$$r(m, C, Pr) = \frac{T_e(x) - T_\infty}{U^2(x)/2c_p} = \frac{T_n^*}{u_1^2/2c_p} = \frac{2}{Ec^*}. \quad (26)$$

Die Kombination der Gleichungen (19, 23–25) führt dann auf die Beziehung für den Wärmestrom an der Wand:

$$\begin{aligned} q(x, m, C, Pr, Ec) &= - \lambda \frac{T_w - T_e}{x} \sqrt{\left[\frac{m+1}{2} \frac{U(x) x}{v} \right]} F_I \\ &\quad (n = 2m). \end{aligned} \quad (27)$$

Aus dem Vergleich von Gleichung (27) und Gleichung (19) erkennt man, dass analog dem bereits erwähnten Sachverhalt bei der längsangeströmten ebenen Platte der Wärmestrom unter Berücksichtigung der Reibungswärme mit der gleichen Formel berechnet wird wie der Wärmestrom ohne Berücksichtigung der Reibungswärme ($F_{II} = 0$) in Gleichung (19), wenn lediglich statt $T_w - T_\infty$ der Ausdruck $T_w - T_e$ gesetzt wird [6].

Falls die Bedingung $2m - n = 0$ nicht erfüllt ist, lässt sich Gleichung (19) dennoch formal auf eine der Gleichung (27) entsprechende Formel

$$q = - \lambda \frac{T_w - T_{eff}}{x} \sqrt{\left[\frac{m+1}{2} \frac{U(x) x}{v} \right]} F_I \quad (28)$$

bringen, wenn man folgendermassen die von Eckert [3] als effektive Temperatur T_{eff} bezeichnete Temperatur einführt:

$$T_{eff}(x) - T_\infty = - \frac{U^2(x) F_{II}}{c_p F_I}. \quad (29)$$

Analog zu Gleichung (26) lässt sich daraus

auch ein Recovery-Faktor

$$r_{\text{eff}}(m, C, Pr, n) = \frac{T_{\text{eff}}(x) - T_{\infty}}{U^2(x)/2c_p} = -2 \frac{F_{\text{II}}}{F_1} \quad (30)$$

bilden. Im Gegensatz zu dem Recovery-Faktor r nach Gleichung (26) ist r_{eff} auch noch von n abhängig. Im allgemeinen besitzt r_{eff} keine physikalische Bedeutung. Lediglich für $n = 0$ lässt sich die von x abhängige Temperatur $T_{\text{eff}}(x)$ als diejenige Temperatur interpretieren, welche die Wand für alle x annehmen muss, damit an der betrachteten Stelle x der Wärmeübergang verschwindet. Da man die Verteilung $T_{\text{eff}}(x)$ für $n = 0$ mit einem Modell, das aus Material mit unendlich grosser Wärmeleitfähigkeit hergestellt ist, experimentell ermitteln könnte, wurde von Eckert [3] $r_{\text{eff}}(m, C, Pr, n = 0)$ mit r_{∞} bezeichnet, vergl. auch Brun [7]. Im Gegensatz dazu müsste der Recovery-Faktor nach Gleichung (26) $r = r_{\text{eff}}(m, C, Pr, n = 2m)$ mit einem Modell bestimmt werden, das aus Material ohne Wärmeleitfähigkeit besteht.

Da die Energiegleichung, Gleichung (3), linear ist, lässt sich die vorstehende Betrachtung sofort auf allgemeine Verteilungen der Wandtemperatur von der Form

$$T_W(x) = T_{\infty} + \sum_n T_n x^n \quad (31)$$

erweitern, wobei n beliebige, auch negative und gebrochene Zahlen sein können. Durch Superposition erhält man dann für die Temperaturverteilung

$$T(x, y) = T_{\infty} + \sum_n \vartheta_1(\eta, n) T_n x^n + \frac{U^2(x)}{c_p} \vartheta_{\text{II}}(\eta) \quad (32)$$

und damit für den Wärmeübergang

$$q(x) = -\lambda \sqrt{\left[\frac{m+1}{2} \frac{U(x)}{vx} \right]} \left[\sum_n \vartheta_1(0, n) T_n x^n + \frac{U^2(x)}{c_p} \vartheta'_{\text{II}}(0) \right]. \quad (33)$$

2.2. Lösungen ohne Berücksichtigung der Reibungswärme

Die Differentialgleichung (16) ist schon mehr-

fach in der Literatur behandelt worden. Eine Zusammenstellung von Arbeiten, in denen Lösungen dieser Gleichung angegeben sind, befindet sich in Tabelle 1. Da die praktisch wichtigen Bereiche der Parameter durch die vorhandenen Lösungen bereits überdeckt sind, sollen hier nur gewisse Spezialfälle der Gleichung (16), insbesondere diejenigen für grosse und für kleine Prandtl-Zahlen betrachtet werden, da sich dann einfache Formeln für den Wärmestrom an der Wand herleiten lassen.

2.2.1. $n = -(m+1)/2 = -1/(2-\beta)$. In diesem Fall lässt sich die Differentialgleichung (16) sofort integrieren, vergl. [14, 15], und liefert

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = \frac{C Pr}{\sqrt{(2-\beta)}}. \quad (34)$$

2.2.2. $n = 0$ (konstante Wandtemperatur). Die Lösung der Differentialgleichung lässt sich explizit angeben [21]. Für die Nusselt-Zahl folgt daraus:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = \frac{1}{\sqrt{(2-\beta)} \int_0^\infty \exp \left[-Pr \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] d\eta}. \quad (35)$$

Im Sonderfall $m = 0$ ($\beta = 0$) lässt sich aus Gleichung (9) sofort die Beziehung

$$f''(\eta) = f''(0) \exp \left[- \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] \quad (36)$$

herleiten, wodurch statt Gleichung (35) auch die bekannte Beziehung von Pohlhausen [1]

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = \frac{1}{\sqrt{(2)}} \frac{[f''(0)]^{Pr}}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{Pr} d\eta} \quad (m = 0) \quad (37)$$

benutzt werden kann. Gleichung (37) besagt unter anderem, dass die Nusselt-Zahlen bei $f''(0) = 0$ —dieser Fall liegt nach [5] bei $C = -0,8757$ vor—für alle Prandtl-Zahlen verschwinden. Für $Pr = 1$ geht Gleichung (37)

Tabelle 1. Zusammenstellung von Arbeiten, die sich mit der Berechnung des Wärmeüberganges bei Keiströmungen ohne Berücksichtigung der Reibungswärme beschäftigen. Geschwindigkeit der Außenströmung: $U(x) = u_1 x^m$. Absaugverteilung:

$$v_w(x) = -C \sqrt{\left(\frac{(m+1)}{2} u_1 y\right) x^{(m-1)/2}}.$$

Wandtemperaturverteilung: $T_w(x) = T_w x^* + T_\infty$. $n^*(m, Pr)$ ist derjenige Temperaturexponent, bei dem die Nusselt-Zahl verschwindet. $C^*(m)$ ist der Absaugeparameter für ablösende Strömung [$f''(0) = 0$]

Autoren	Ref.	Druckgradient (m)	Absaugeparameter (C)	Prandtl-Zahl (Pr)	Exponent für Wandtemperatur (n)
Mickley, Ross, Squyers und Stewart	[8]	0	-0,707 $\leq C \leq 3,535$	0,6 $\leq Pr \leq 5$	0
Evans	[9]	-1 $< m < \infty$	$C^* \leq C < \infty$	$0 < Pr < \infty$	0
Stewart und Prober	[10]	$-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$	$C^* \leq C \leq \infty$	$0 < Pr < \infty$	$-1 \leq n \leq 4$
Schuh		0; 0,176	0	0,7	$-1,2 \leq n \leq 4$
Chapmann und Rubesin	[11]	1	0	0,7	$0 \leq n \leq 10$
Schlüchting	[12]	0	0	0,72	$0 \leq n \leq 10$
Sparrow und Lin	[13]	0	0	1	$0; 1; 2$
Tifford und Chu	[14]	-0,0904 $\leq m \leq \infty$	0	0,7; 1; 10; 100	$0,5 \leq n \leq 10,5$
Levy	[15]	0	0	0,5; 0,72; 1	$0 \leq n \leq 10$
		-0,0904; 1; 4	0	0,7; 2; 10; 20;	$n^* \leq n \leq 4$
Frössling	[16]	1	0	0,7	$n^* \leq n \leq 4$
Guha und Yih	[17]	1	0	0,7	$0; 2; 4; 6$
Sparrow und Starr	[18]	0	-0,707 $\leq C \leq 0$	0,73 0,7	$0; 2; 4; 6$
				0; 0,5	
Livingood und Donoughe	[19]	0; 0,5; 1; 0	$0; -\frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(m+1)}{2}\right]}; -\sqrt{\left[\frac{(m+1)}{2}\right]}$	0,7	$n^* \leq n \leq 1$
Koh und Hartnett	[20]	0; $\frac{1}{2}$	$0 \leq C \leq 12 \sqrt{\left[\frac{(m+1)}{2}\right]}$	0,73	$-0,5 \leq n \leq 10$
				0,73	$-1 \leq n \leq 10$

über in die bekannte Beziehung der Reynolds-Analogie:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = \frac{1}{\sqrt{(2)}} f''(0) \quad (m = 0, Pr = 1). \quad (38)$$

Wie Watson [22] gezeigt hat, nähern sich für grosse Absaugegeschwindigkeiten ($C \rightarrow \infty$) die Geschwindigkeitsprofile der Keilströmungen dem asymptotischen Absaugeprofil, d.h. es gilt:

$$f(\eta) = C + \eta - (1 - e^{-C\eta}). \quad (39)$$

Setzt man das in Gleichung (35) ein, so ergibt sich für grosse Werte C sofort:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = \frac{PrC}{\sqrt{(2 - \beta)}} \quad (C \rightarrow \infty). \quad (40)$$

2.2.3. $2n/(m + 1) \gg 1$. In diesem Fall dominiert der dritte Term in Gleichung (16), so dass der zweite Term demgegenüber vernachlässigt werden kann. Da das Glied $[2n/(m + 1)] Pr f'$ von der Größenordnung Eins ist, treten nur sehr kleine Werte $f'(\eta)$ auf, so dass man für $f'(\eta)$ die Reihenentwicklung um $\eta = 0$ einsetzen kann:

$$f'(\eta) = f''(0) \eta - [\beta + Cf''(0)] \frac{\eta^2}{2} + O(\eta^3). \quad (41)$$

Damit folgt für Gleichung (16)

$$\vartheta'' - \frac{2n}{m + 1} Pr f''(0) \eta \vartheta_1 = 0 \quad f''(0) \neq 0 \quad (42)$$

bzw.

$$\vartheta'' + \frac{n}{m + 1} Pr \beta \eta^2 \vartheta_1 = 0 \quad f''(0) = 0. \quad (43)$$

Diese Gleichungen enthalten den Absaugeparameter C nicht mehr explizit, jedoch sind $f''(0)$ in Gleichung (42) bzw. β in Gleichung (43) noch von C abhängig. Wie Tifford und Chu [14] gezeigt haben, lassen sich die Lösungen der Gleichungen (42) und (43) durch Bessel-funktionen darstellen. Für den Wärmeübergang ergeben sich daraus die folgenden Beziehungen:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = 0,7290 \left[n \sqrt{\left(\frac{m + 1}{2}\right) f''(0) Pr} \right]^{\frac{1}{2}} \quad f''(0) > 0 \quad (44)$$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = 0,5685 (-m n Pr)^{\frac{1}{2}} \quad f''(0) = 0. \quad (45)$$

2.2.4. *Reduktion auf Normalform.* Mit dem Ansatz

$$\vartheta_1(\eta) = \theta(\eta) \exp \left[-\frac{1}{2} Pr \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] \quad (46)$$

erhält man aus Gleichung (16) für die Funktion $\theta(\eta)$ folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in Normalform:

$$\theta'' + P(\eta) \theta = 0 \quad (47)$$

mit

$$P(\eta) = -\frac{1}{4} Pr^2 f^2(\eta) - [\frac{1}{2} + (2 - \beta) n] Pr f'(\eta). \quad (48)$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad \theta(0) &= 1 \\ \eta = \infty: \theta(\infty) &= O[\exp(\frac{1}{2} Pr^2)] \end{aligned} \quad (49)$$

Für den Anstieg bei $\eta = 0$ folgt daraus:

$$\vartheta'_1(0) = \theta'(0) - \frac{1}{2} Pr C. \quad (50)$$

2.2.5. $Pr \rightarrow \infty$. Bei grossen Prandtl-Zahlen ist die Dicke der Temperaturgrenzschicht klein gegenüber derjenigen der Strömungsgrenzschicht. Die Temperatur nimmt bereits bei Wandabständen den Wert T_∞ der Außenströmung an, bei denen die Geschwindigkeit sich noch stark mit η ändert. Es genügt deshalb, für die Funktion $f(\eta)$ in Gleichung (16) eine Reihenentwicklung für kleine η zu verwenden:

$$\begin{aligned} f(\eta) = C + \frac{1}{2} f''(0) \eta^2 - \frac{1}{6} [\beta + Cf''(0)] \eta^3 \\ + O(\eta^4). \end{aligned} \quad (51)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (48)

$$\begin{aligned} P(\eta) = -\frac{1}{4} Pr^2 C^2 - Pr [\frac{1}{2} + (2 - \beta) n] f''(0) \eta \\ - \{ \frac{1}{4} Pr^2 C f''(0) - \frac{1}{2} Pr [\frac{1}{2} + (2 - \beta) n] \\ \times [\beta + Cf''(0)] \} \eta^2 + O(\eta^3). \end{aligned} \quad (52)$$

Die auf diese Weise gewonnenen Formeln für den Wärmeübergang bei grossen Prandtl-Zahlen sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Sie sollen im folgenden noch kurz besprochen werden.

Tabelle 2. Formeln für das asymptotische Verhalten der Nusselt-Zahlen bei grossen Prandtl-Zahlen ohne Berücksichtigung der Reibungswärme

$C < 0$ (Ausblasen)	$f''(0) > 0$	$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = \frac{1}{\sqrt{(2 - \beta)}} \left[\frac{1}{2} C Pr - \frac{A_i(k)}{A_i(k)} \left\{ \left[\frac{1}{2} + (2 - \beta)n \right] f''(0) Pr^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$	(56)
		$k = \frac{1}{4} \frac{C^2 Pr^{\frac{1}{2}}}{\{[\frac{1}{2} + (2 - \beta)n] f''(0)\}^{\frac{1}{2}}}$	
$C = 0$	$f''(0) = 0$	$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = \frac{1}{\sqrt{(2 - \beta)}} \left[\frac{1}{2} C Pr + 2 \frac{\Gamma(\frac{3}{4} + k)}{\Gamma(\frac{1}{4} + k)} \left\{ -\frac{1}{2} \beta Pr \left[\frac{1}{2} + (2 - \beta)n \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$	(59)
		$k = \frac{1}{8} \frac{C^2 Pr^2}{\sqrt{\{-\frac{1}{2} \beta Pr [\frac{1}{2} + (2 - \beta)n]\}}}$	
$C > 0$ (Absaugen)	$f''(0) > 0$	$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = \frac{1}{\sqrt{(2 - \beta)}} \frac{3[f''(0)]^{\frac{1}{2}} \Gamma[1 + \frac{2}{3}n(2 - \beta)] \Gamma(\frac{2}{3})}{6^{\frac{1}{2}} \Gamma[\frac{2}{3} + \frac{2}{3}n(2 - \beta)] \Gamma(\frac{1}{3})} Pr^{\frac{1}{2}}$	(61)
		$f''(0) = 0$	(62)
$C > 0$ (Absaugen)	$(Absaugen)$	$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = \frac{C}{\sqrt{(2 - \beta)}} Pr$	(54)

- (a) Für $C > 0$ genügt die Berücksichtigung des absoluten Gliedes in Gleichung (52). Man erhält dann aus Gleichung (47) sofort die Lösung

$$\theta(\eta) = \exp(-\frac{1}{2} Pr C \eta) \quad (53)$$

woraus wegen Gleichung (50) Formel (54) folgt.

- (b) Für $C < 0$ muss unterschieden werden zwischen Fällen mit $f''(0) > 0$ und solchen mit $f''(0) = 0$ (Ablösung).

Für $f''(0) > 0$ genügt in Gleichung (52) die Berücksichtigung des absoluten und des linearen Gliedes. Dann lässt sich die vereinfachte Gleichung (47)

$$\theta'' - \{ \frac{1}{4} Pr^2 C^2 + Pr[\frac{1}{2} + (2 - \beta)n] f''(0) \eta \} \theta = 0 \quad (55)$$

mit Hilfe von Airy-Funktionen $A_i(k)$ lösen [23]. Für die Nusselt-Zahl erhält man dann Formel (56) der Tabelle 2. Für sehr grosse Werte k folgt $A_i(k)/A_i(k) = -k^{\frac{1}{2}}$ und damit aus Gleichung (56)

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = 0 \quad (Pr \rightarrow \infty, C < 0). \quad (57)$$

Im Grenzfall $C \rightarrow 0$ geht Gleichung (56) in das erste Glied der Formel von Imai [24] über.

Für $f''(0) = 0$ erhält man aus Gleichung (47) unter Berücksichtigung auch des quadratischen Gliedes in Gleichung (52):

$$\theta'' - \{ \frac{1}{4} Pr^2 C^2 - \frac{1}{2} \beta Pr [\frac{1}{2} + (2 - \beta)n] \eta^2 \} \theta = 0. \quad (58)$$

Die Lösung dieser Gleichung lässt sich mit Hilfe von konfluenten hypergeometrischen Funktionen angeben. Für die Nusselt-Zahl folgt daraus mit $\beta \neq 0$ die Formel (59) in Tabelle 2. Im Sonderfall $C = 0$, $\beta = -0,199$ und $n = 0$ ergibt sich dann die Formel

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = 0,235 Pr^{\frac{1}{2}} \quad (C = 0, n = 0), \quad (60)$$

die bis auf eine geringe Abweichung des Zahlenfaktors mit der Formel von Evans [14] übereinstimmt.

- (c) Für $C = 0$ und $f''(0) \neq 0$ wurde bereits von Punnis [25] und Fettis [26] die Formel (61) der Tabelle 2 angegeben, vergl. auch [27],

28], die mit der Formel von Lighthill [29] identisch ist und für $n = 0$ in die Beziehung von Evans [4] übergeht.

Für $C = 0$ und $f''(0) = 0$ ($\beta = -0,199$) gilt nach Rosner [30] die Formel (62) der Tabelle 2, die im Fall $n = 0$ wiederum in die Beziehung von Evans [4] übergeht.

Es sei hier angemerkt, dass für grosse Werte n die Gleichungen (56) und (59) wegen $k \rightarrow 0$ dieselben Ergebnisse liefern wie die Gleichungen (61) bzw. (62). Diese Ergebnisse sind dann ausserdem identisch mit den Gleichungen (44) bzw. (45).

2.2.6. $Pr \rightarrow 0$. Bei kleinen Prandtl-Zahlen ist die Strömungsgrenzschicht sehr viel dünner als die Temperaturgrenzschicht, so dass für die Geschwindigkeit in guter Näherung der über η konstante Wert der Aussenströmung gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \eta \\ f'(\eta) &= 1. \end{aligned} \quad \left. \right\} (63)$$

Führt man diese Werte, die den Absauge-Parameter C nicht mehr enthalten, in Gleichung (48) ein, so ergibt sich aus Gleichung (47) die Differentialgleichung

$$\theta'' - \left\{ \frac{1}{4} Pr^2 \eta^2 + \left[\frac{1}{2} + (2 - \beta) n \right] Pr \right\} \theta = 0 \quad (64)$$

deren Lösungen durch konfluente hypergeometrische Funktionen dargestellt werden können [23]. Für die Nusselt-Zahl ergibt sich dann:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = \sqrt{\frac{2}{2 - \beta} \frac{\Gamma[1 + (n/2)(2 - \beta)]}{\Gamma[\frac{1}{2} + (n/2)(2 - \beta)]}} Pr^{\frac{1}{2}}. \quad (65)$$

Die Beziehung Gleichung (65) ist bereits von Morgan *et al.* [31] angegeben worden.

2.3. Zusatzlösung infolge Berücksichtigung der Reibungswärme

Die vom Parameter n unabhängige Differentialgleichung Gleichung (17) wurde für eine grössere Anzahl von Werten C , Pr und m mittels der elektronischen Rechenanlage Siemens

2002 numerisch gelöst. Die für den Wärmeübergang nach Gleichung (19) wichtige Grösse $\theta''(0)$ lässt sich wie folgt aus den Werten $Nu_x/\sqrt{Re_x}$ und r , die in den Tabellen 3 und 4 angegeben sind, ermitteln:

$$\theta''(0) = F_{II}(m, C, Pr) = \frac{1}{2} \sqrt{(2 - \beta)} \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} r. \quad (66)$$

Da die Werte $\theta''(0)$ mit dem noch zu besprechenden Recovery-Faktor r aufs engste verbunden sind, soll der Verlauf und insbesondere das asymptotische Verhalten von $\theta''(0)$ nicht im einzelnen betrachtet werden. Statt dessen soll später das entsprechende Verhalten des Recovery-Faktors besprochen werden. Es sei hier nur auf den Spezialfall $\beta = -0,5$ ($m = -\frac{1}{2}$) hingewiesen, für den sofort eine geschlossene Lösung von Gleichung (17) durch einfache Integration gefunden werden kann. Unter Benutzung der Gleichung (9) für $\beta = -0,5$ erhält man nach einigen Zwischenrechnungen:

$$\theta''(0) = Pr \int_0^{\infty} [f''(\eta)]^2 d\eta = \frac{1}{2} Pr C (\beta = -0,5). \quad (67)$$

3. WÄRMEÜBERGANG FÜR $n = 2m$

3.1. Lösungen ohne Berücksichtigung der Reibungswärme

Im Hinblick auf die Berechnung des Recovery-Faktors r wurde auch das zugehörige Problem ohne Berücksichtigung der Reibungswärme für die Kombinationen $n = 2m$ untersucht. Es wurden für eine grössere Anzahl von Parametern m , C und Pr die Lösungen der Gleichung (16) mit $n = 2m$ numerisch ermittelt. Die daraus gewonnenen Ergebnisse für die Werte $Nu_x/\sqrt{Re_x}$ sind in den Tabellen 3 und 4 zusammengestellt. Spezielle Lösungen und asymptotisches Verhalten lassen sich sofort aus den Ergebnissen des Abschnittes 2.2 durch Spezialisierung auf $n = 2m$ erhalten.

In den Bildern 2 und 3 sind die Ergebnisse der Werte $Nu_x/\sqrt{Re_x}$ als Funktion der Prandtl-Zahl und des Absaugeparameters C aufgetragen,

Tabelle 3. Nusselt-Zahlen und Recovery-Faktoren für verschiedene Werte β , C und Pr im Fall $n = 2m$ (keine Ablösung)

β	C	$f''(0)$	$\int_0^{\infty} f''^{1/2} d\eta$	$Nu_x/\sqrt{(Re_x)}$						r				
				$Pr = 0.01$	0.1	0.7	1	10	100	$Pr = 0.01$	0.1	0.7	1	10
-1	2	1,414214	0,7863	-0,3882	-0,2250	0,6398	1,0205	11,53	115,5	-0,0292	-0,4930	1,1327	1	0,842
-0,5	2	1,874353	1	0,0127	0,1265	0,8854	1,2649	12,65	126,5	1	1	1	1	1
-0,5	1	0,735465	0,5	0,0063	0,0632	0,4427	0,6325	6,325	63,25	1	1	1	1	1,111
0	2	2,194509	1,1600	0,0639	0,2591	1,1363	1,5518	14,18	141,4	0,2528	0,6089	0,9559	1	1,284
0	1	1,283635	0,7301	0,0583	0,2012	0,6950	0,9077	7,148	70,72	0,1722	0,4770	0,9195	1	1,284
0	0,5	0,837916	0,5370	0,0552	0,1716	0,4872	0,6066	3,702	35,38	0,1320	0,3958	0,8866	1	1,576
0	0	0,469600	0,3692	0,0516	0,1400	0,2927	0,3321	0,7282	1,572	0,0943	0,3073	0,8337	1	2,962
0,5	2	2,451013	1,2917	0,1075	0,3859	1,4481	1,9282	16,42	163,3	0,1919	0,5163	0,9337	1	1,196
0,5	1	1,624199	0,8950	0,1010	0,3215	0,9692	1,2271	8,370	81,68	0,1398	0,4146	0,8961	1	1,458
0,5	0,5	1,2544023	0,7192	0,0974	0,2888	0,7477	0,9072	4,527	40,90	0,1153	0,3601	0,8690	1	1,837
0,5	0	0,927680	0,5645	0,0935	0,2552	0,5442	0,6205	1,401	3,073	0,0929	0,3059	0,8337	1	2,967
0,5	-0,5	0,659364	0,4356	0,0891	0,2208	0,3660	0,3816	0,1907	0,0317	0,0735	0,2550	0,7973	1	6,338
0,5	-1	0,460428	0,3352	0,0842	0,1862	0,2231	0,2604	0,054	0,0055	0,0579	0,2112	0,7584	1	9,122
1	2	2,670056	1,4057	0,1628	0,5548	1,9162	2,5093	20,17	200,0	0,1681	0,4733	0,9202	1	1,266
1	1	1,389314	1,0288	0,1547	0,4771	1,3519	1,6840	10,41	100,1	0,1280	0,3898	0,8848	1	1,581
1	0,5	1,541751	0,8618	0,1503	0,4377	1,0918	1,3097	5,842	50,18	0,1095	0,3471	0,8618	1	1,989
1	0	1,232588	0,7129	0,1454	0,3977	0,8520	0,9724	2,208	4,861	0,0924	0,3055	0,8357	1	2,968
1	-0,5	0,969230	0,5848	0,1404	0,3574	0,6380	0,6832	0,527	0,0950	0,0774	0,2666	0,8074	1	5,117
1	-1	0,756575	0,4786	0,1349	0,3173	0,4564	0,4522	0,174	0,0185	0,0647	0,2320	0,7791	1	7,468

Tabelle 4. Nusselt-Zahlen und Recovery-Faktoren für verschiedene Werte β und Pr im Fall $n = 2m$ bei ablösender Strömung ($f''(0) = 0$)

β	C	$f''(0)$	$\int_0^{\infty} f''^{1/2} d\eta$	$Nu_x/\sqrt{(Re_x)}$						r				
				$Pr = 0.01$	0.1	0.7	1	10	100	$Pr = 0.01$	0.1	0.7	1	10
0	-0,875745	0	0,1921	0	0,0759	0	0,05922	0	0,0444	0	0,0305	0,1779	0,6816	$> 10^3$
-0,05	-0,500833	0	0,2227	0,0395	0,0442	0,0444	-0,00031	-16,5	-0,0225	0,2159	0,7449	1	-2,523	
-0,1	-0,299685	0	0,2407	0,0382	0,0830	0,09787	0,0894	-0,00434	-8,70	0,0727	0,2456	0,7796	1	-4,179
-0,1988377	0	0	0,2671	0,0330	0,0843	0,1587	0,1757	0,3220	0,5745	0,0972	0,3106	0,8359	1	2,959
-0,2	0,0030922	0	0,2674	0,0329	0,0843	0,1593	0,1766	0,3337	0,6989	0,0975	0,3115	0,8365	1	2,918
-0,5	0,645965	0	0,3230	0,0041	0,0409	0,2860	0,4085	40,85	1	1	1	1	1	1
-1	1,4142	0	0,3865	-21,5	-1,895	0,3918	0,7105	8,163	-0,1389	-0,0103	-0,0103	1,4210	1	0,682
-1,5	2,0245	0	0,4362	0,345	0,262	0,3592	0,9286	10,82	0,1414	0,1099	0,2805	1	0,575	
-2	2,5489	0	0,4779	-0,289	0,0462	-0,3789	1,1169	12,74	-0,0264	1,189	-7,9409	1	0,518	

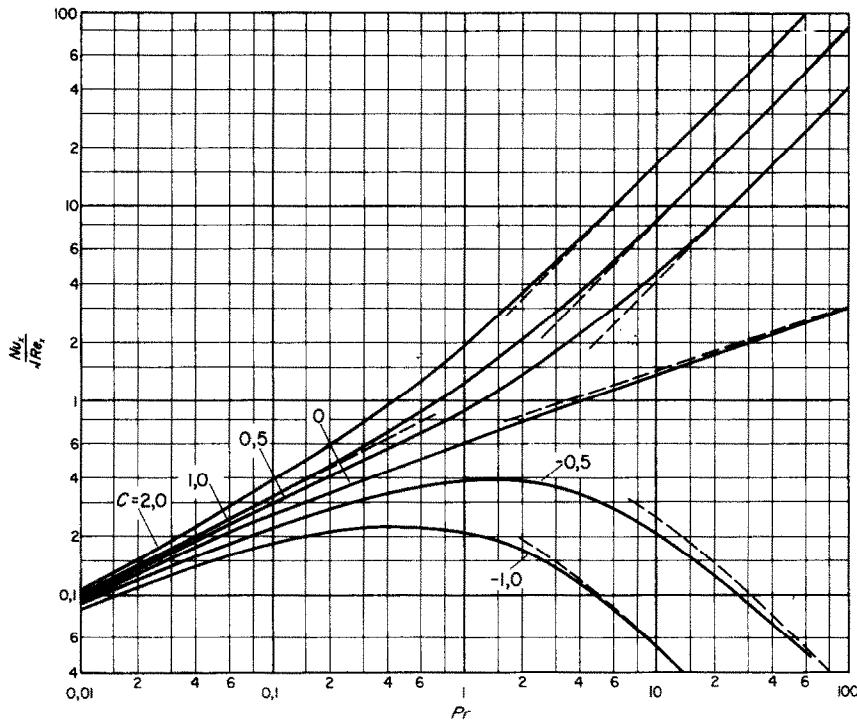


BILD 2. Wärmeübergang bei einer Keilströmung ($m = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{1}{2}$) in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl Pr und dem Absaugeparameter C . Es gilt $n = 2m = \frac{2}{3}$. Asymptotisches Verhalten entsprechend den Formeln in Abschnitt 2.2.

und zwar für die beiden Fälle $\beta = 0,5$ (Zusammenhang mit räumlicher Staupunktströmung, vergl. [1]) und $\beta = 1$ (ebene Staupunktströmung). Die eingezeichneten asymptotischen Kurven für grosse und kleine Prandtl-Zahlen entsprechen den in Abschnitt 2.2 angegebenen Formeln. Wie auch schon aus den Ergebnissen für die ebene Platte ($m = n = 0$), z.B. in [3], bekannt ist, wird durch Absaugen der Wärmeübergang grösser und durch Ausblasen kleiner. Der Einfluss von Absaugen oder Ausblasen auf die Nusselt-Zahl nimmt mit wachsender Prandtl-Zahl stark zu. Für negative C -Werte (Ausblasen) ergibt sich eine maximale Nusselt-Zahl in der Umgebung von $Pr \approx 1$. Den starken Einfluss von Absaugen oder Ausblasen auf den Wärmeübergang kann man noch deutlicher an Bild 4 erkennen. Insbesondere zeigt das Bild, dass die Nusselt-Zahl für grosse Absaugeparameter nega-

tiv werden kann. Auf dieses Verhalten, das nur bei negativen β -Werten auftreten kann, hat bereits Schuh [10] hingewiesen. Bei negativen β -Werten nimmt die Wandtemperatur mit zunehmenden x -Werten ab. Dadurch entstehen Temperaturprofile in der Grenzschicht, in denen höhere Temperaturen als die Wandtemperatur auftreten, so dass Wärme von der Strömung an die Wand übergeht, obwohl die Wand eine höhere Temperatur als die Umgebung besitzt. Die "Übertemperatur" entsteht durch Zufluss aus den stromaufwärts gelegenen Gebieten mit höherer Temperatur. Hieran wird deutlich, dass bei veränderlicher Wandtemperatur nicht nur die örtliche Differenz von Wand- und Ausentemperatur, sondern auch die "Vorgeschiechte" der Temperaturgrenzschicht in die Berechnung des Wärmeüberganges eingeht, vergl. [1, 2, 12]. In Bild 5 sind diejenigen

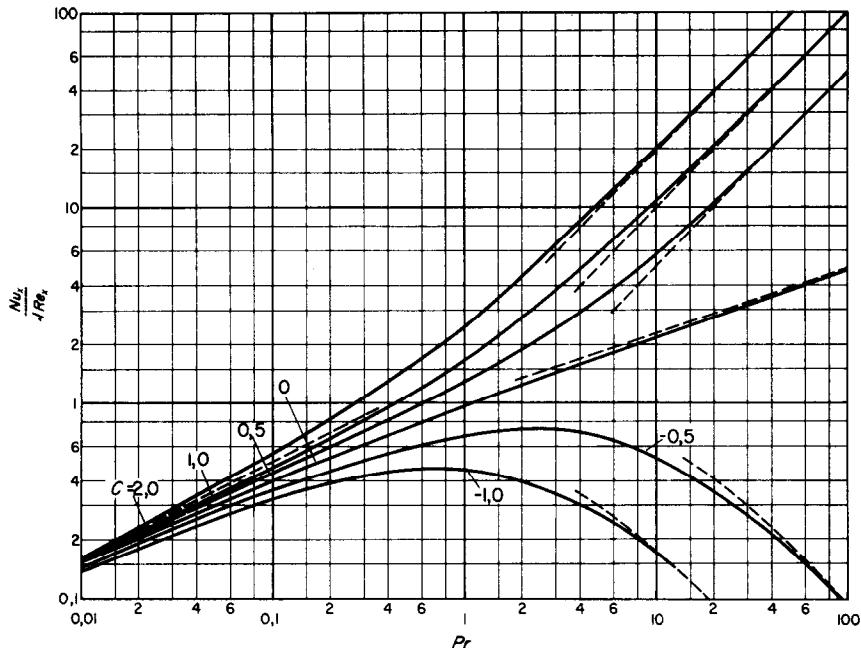


BILD 3. Wärmeübergang bei der Staupunktströmung ($m = 1$; $\beta = 1$) in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl Pr und dem Absaugeparameter C . Es gilt $n = 2m = 2$. Asymptotisches Verhalten entsprechend den Formeln in Abschnitt 2.2.

Bereiche im β - C -Koordinatensystem getönt dargestellt, in denen der Wärmeübergang Null werden kann. Danach kann dieser Fall im linken Zwickel ($C < 0$) für Prandtl-Zahlen $Pr \geq 1$ und im rechten Bereich für $0 \leq Pr \leq 1$ auftreten. Da also für $\beta < 0$ sowohl positive als auch negative Nusselt-Zahlen auftreten, wurde auf eine Darstellung der Ergebnisse entsprechend den Bildern 2 und 3 verzichtet, da dann die logarithmische Auftragung ungeeignet ist. Soweit möglich wurden die vorliegenden Ergebnisse mit bekannten Lösungen der in Tabelle 1 genannten Autoren verglichen. Die Übereinstimmung war in fast allen Fällen recht gut.

3.2. Berechnung des Recovery-Faktors r

3.2.1. Allgemeine Lösung. Wie schon erwähnt, wurden für die Kombination $n = 2m$ und eine Anzahl Parameter m , C und Pr die Gleichungen (16) und (17) numerisch gelöst. Aus den Anstiegen der Lösungen bei $\eta = 0$ $\vartheta'_I(0) = F_I$ und $\vartheta'_{II}(0) = F_{II}$ wurde der Recovery-Faktor r aufgrund der Beziehungen Gleichung (24) und

Gleichung (26) nach der bereits in Gleichung (66) gegebenen Formel wie folgt berechnet:

$$r = \frac{T_e(x) - T_\infty}{U^2(x)/2c_p} = \frac{2}{Ec^*} = -2 \frac{F_{II}}{F_I}$$

$$= -2 \frac{\vartheta'_{II}(0)}{\vartheta'_I(0)} = \frac{2\vartheta'_{II}(0)}{\sqrt{(2 - \beta) Nu_x / (Re_x)}}. \quad (68)$$

Die erhaltenen Zahlenwerte sind in den Tabellen 3 und 4 zusammengestellt. Im folgenden sollen noch einige spezielle Formeln für r diskutiert werden.

3.2.2. $\beta = -0,5$ ($m = -\frac{1}{2}$). Wegen der einfachen Beziehungen Gleichung (34) und Gleichung (67) folgt sofort, dass für $\beta = -0,5$ der Recovery-Faktor r für alle Prandtl-Zahlen und alle Absaugeparameter gleich Eins ist.

3.2.3. $\beta = 0$ ($m = 0$, ebene Platte). In diesem Fall gilt die bereits bekannte geschlossene Formel, [1]:

$$r = 2Pr \int_0^\infty [f''(\eta)]^{Pr} \left[\int_0^\eta f''(\xi)^{2-Pr} d\xi \right] d\eta \quad (69)$$

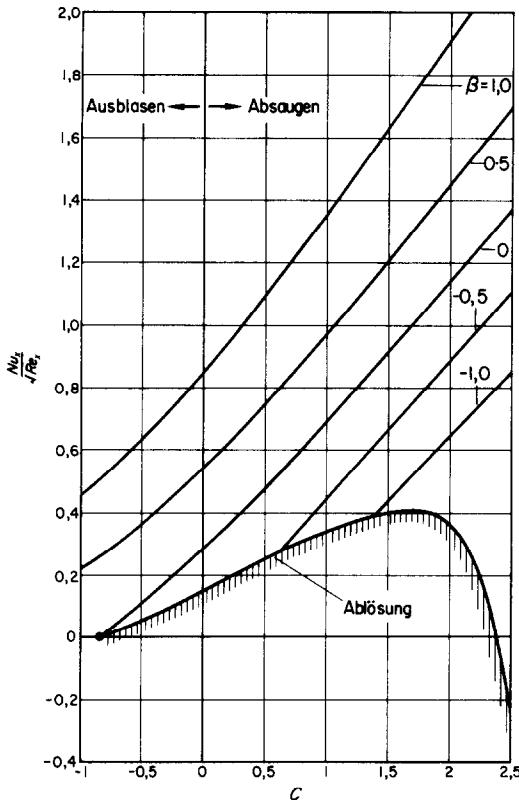


BILD 4. Wärmeübergang bei Keilströmungen in Abhängigkeit vom Absaugeparameter C und dem Keilwinkel $\beta = 2m/(m+1)$ bei $Pr = 0,7$. Es gilt $n = 2m$.

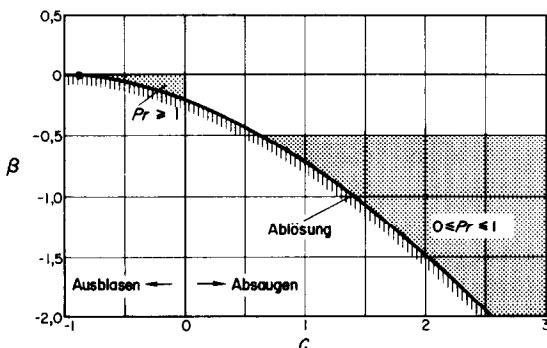


BILD 5. Bereiche, in denen ohne Berücksichtigung der Reibungswärme der Wärmeübergang verschwindet. Es gilt $n = 2m$. In den getönten Gebieten gibt es zu jedem Punkt der β -C-Ebene jeweils eine Prandtl-Zahl aus dem angegebenen Intervall, für die der Wärmeübergang verschwindet.

die im Sonderfall $Pr = 1$ stets $r = 1$ liefert. Ebenso ergibt sich für $C \rightarrow \infty$ unter Berücksichtigung von Gleichung (39) unabhängig von der Prandtl-Zahl der Wert $r = 1$.

3.2.4. $Pr \rightarrow \infty$. Für $C > 0$ lässt sich Gleichung (17) vereinfachen zu

$$\vartheta''_{II} + Pr C \vartheta'_{II} = -Pr f''^2 \quad (70)$$

wofür leicht die Lösung angegeben werden kann [23]. Für den Anstieg an der Wand folgt aus der Lösung

$$\vartheta''_{II}(0) = Pr \int_0^\infty [f''(\eta)]^2 d\eta \quad (71)$$

was mit Gleichung (54) und Gleichung (68) ergibt:

$$r = \frac{2}{C} \int_0^\infty [f''(\eta)]^2 d\eta \quad (C > 0). \quad (72)$$

Danach strebt der Recovery-Faktor r für grosse Prandtl-Zahlen einem endlichen Wert zu. Der Vollständigkeit halber wurden in die Tabellen 3 und 4 auch die Werte des in Gleichung (72) auftretenden Integrals mit angegeben, das mit der Energieverlustdicke wie folgt zusammenhängt:

$$\int_0^\infty [f''(\eta)]^2 d\eta = \frac{C}{2} + (\beta + \frac{1}{2}) \int_0^\infty f'(\eta) \times \{1 - [f'(\eta)]^2\} d\eta. \quad (73)$$

Für $C = 0$ wurde von Le Fur [32] gezeigt, dass die Formel für r bei grossen Prandtl-Zahlen von m unabhängig ist. Es gilt danach für beliebige m die von Narasimha und Vasantha [33] für $m = 0$ aufgestellte Gleichung:

$$r = 1,9222 Pr^{\frac{1}{3}} - 1,341 \quad (C = 0, m \text{ beliebig}). \quad (74)$$

3.2.5. $Pr \rightarrow 0$. Für kleine Prandtl-Zahlen kann Gleichung (17) in erster Näherung ersetzt werden durch die Gleichung

$$\vartheta''_{II} = -Pr f''^2 \quad (75)$$

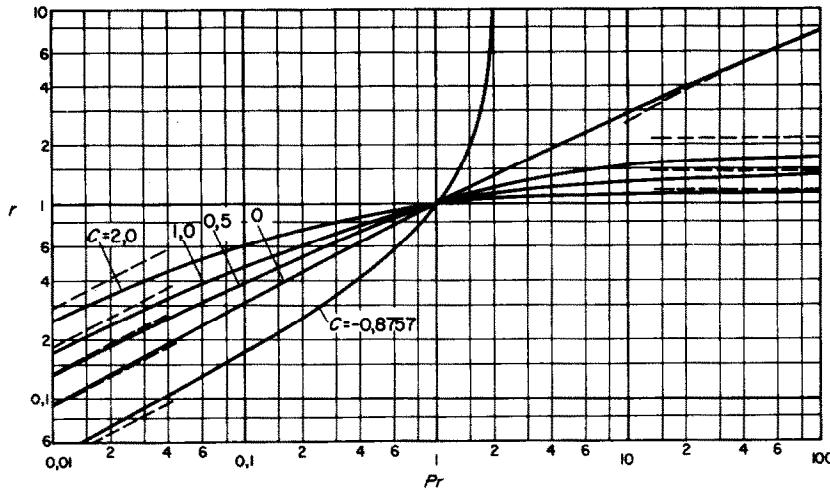


BILD 6. Recovery-Faktor für die längsangeströmte ebene Platte ($m = 0$; $\beta = 0$) in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl Pr und dem Absaugeparameter C . Es gilt $n = 2m = 0$. Asymptotisches Verhalten entsprechend den Formeln in Abschnitt 3.2.

aus der sofort folgt:

$$g''_n(0) = Pr \int_0^\infty [f''(\eta)]^2 d\eta. \quad (76)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (65) mit $n = 2m$

$$r = \sqrt{(2) \frac{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\beta + 1)} Pr^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty [f''(\eta)]^2 d\eta}. \quad (77)$$

Gleichung (77) stimmt mit der Formel von Morgan *et al.* [31] überein, die auch durch die von Sparrow und Gregg [34] für $m = 0$, $C = 0$ und $Pr = 0,03$; $0,01$ und $0,006$ angegebenen Werte der exakten Lösungen bestätigt wird.

3.2.6. *Beispiele.* Wie bereits erwähnt, sind für zahlreiche Wertepaare β , C und Pr die Recovery-Faktoren berechnet und in den Tabellen 3 und 4 zusammengestellt worden. Als Beispiele sind in

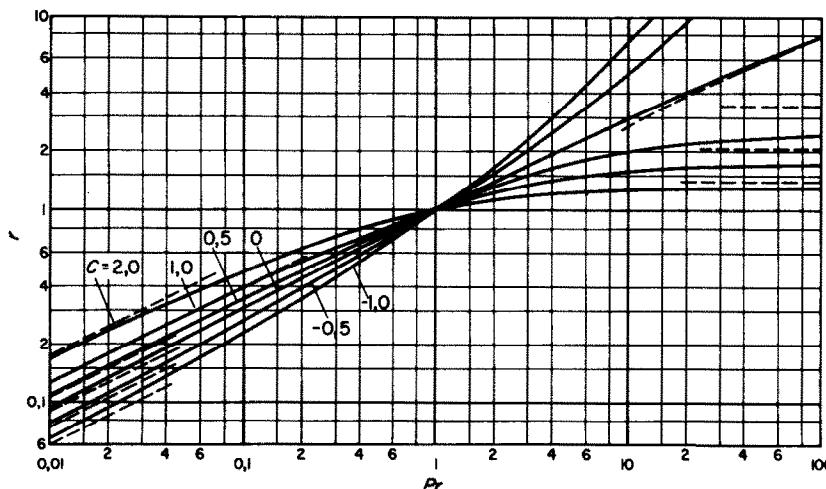


BILD 7. Recovery-Faktor für die Staupunktströmung ($m = 1$; $\beta = 1$) in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl Pr und dem Absaugeparameter C . Es gilt $n = 2m = 2$. Asymptotisches Verhalten entsprechend den Formeln in Abschnitt 3.2.

den Bildern 6 und 7 die Recovery-Faktoren in Abhängigkeit von Pr und C für die Werte $\beta = 0$ (ebene Platte) und $\beta = 1$ (Staupunktströmung) aufgetragen. Ebenfalls eingetragen sind die Geraden entsprechend den asymptotischen Entwicklungen für grosse und kleine Prandtl-Zahlen nach Gleichung (72) bzw. Glei-

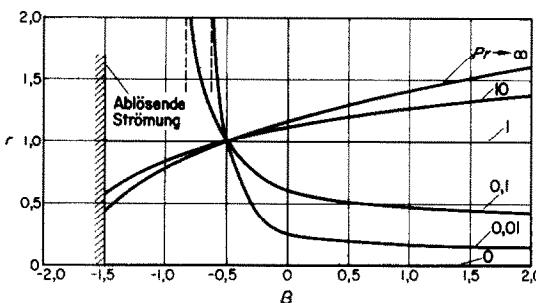


BILD 8. Recovery-Faktor für Keilströmungen in Abhängigkeit vom Keilwinkel $\beta = 2m/(m + 1)$ und der Prandtl-Zahl Pr bei $C = 2$. Es gilt $n = 2m$.

chung (77). Trägt man bei einem festgehaltenen Absaugeparameter C den Recovery-Faktor als Funktion von β und Pr auf, so ergibt sich die Darstellung entsprechend Bild 8 ($C = 2$). Alle Kurven schneiden sich im Punkt $\beta = -0,5$; $r = 1$. Für kleinere β -Werte zeigen die Kurven unterschiedliches Verhalten bei $Pr > 1$ und $Pr < 1$. Während sie für $Pr > 1$ stets r -Werte zwischen 0 und 1 liefern, weisen sie für $Pr < 1$ jeweils eine Unendlichkeitsstelle auf. Diese Stellen entsprechen nach Gleichung (68) genau denjenigen Lösungen, die bereits ohne Berücksichtigung der Reibung verschwindende Nusselt-Zahlen liefern (vergl. Bild 5).

LITERATUR

1. H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*. Braun, Karlsruhe (1965).
2. H. SCHLICHTING, Der Wärmeübergang an einer längsangeströmten ebenen Platte mit veränderlicher Wandtemperatur, *Forsch. Geb. IngWes.* 17, 1-8 (1951).
3. E. R. G. ECKERT and J. N. B. LIVINGOOD, Method for calculation of heat transfer in laminar region of air flow around cylinders of arbitrary cross section (including large temperature differences and transpiration cooling), NACA TN 2733 (1952).
4. H. L. EVANS, Laminar boundary layers with uniform fluid properties. Similar solutions to the velocity equations involving mass transfer, ARC 26180, H.M.T. 48 (1964). Siehe auch *Int. J. Heat Mass Transfer* 5, 373-408 (1962).
5. H. W. EMMONS und D. C. LEIGH, Tabulation of the Blasius function with blowing and suction, ARC Technical Rep. 15,966 C.P. No. 157 (1954).
6. E. R. G. ECKERT und O. DREWITZ, Der Wärmeübergang an eine mit grosser Geschwindigkeit längs angeströmte Platte, *Forsch. Geb. IngWes.* 11, 116-124 (1940).
7. E. A. BRUN, Quelques considérations sur la convection de la chaleur aux grandes vitesses et aux températures élevées, in *Selected Combustion Problems II*, AGARD, pp. 185-198. Butterworth, London (1956).
8. H. S. MICKLEY, R. C. ROSS, A. L. SQUYERS and W. E. STEWART, Heat, mass, and momentum transfer for flow over a flat plate with blowing or suction, NACA TN 3208 (1954).
9. W. E. STEWART and R. PROBER, Heat transfer and diffusion in wedge flows with rapid mass transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer* 5, 1149-1163 (1962).
10. H. SCHUH, Laminarer Wärmeübergang in Grenzschichten bei hohen Geschwindigkeiten, ZWB Forschungsbericht 2019 (1944). Übersetzung: British Ministry of Aircraft Production No. 810 (April 1947).
11. D. R. CHAPMAN and M. W. RUBESIN, Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature, *J. Aeronaut. Sci.* 16, 547-565 (1949).
12. E. R. G. ECKERT and R. M. DRAKE JR., *Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, New York (1959).
13. E. M. SPARROW and S. H. LIN, Boundary layers with prescribed heat flux—application to simultaneous convection and radiation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 8, 437-448 (1965).
14. A. N. TIFFORD and S. T. CHU, Heat transfer in laminar boundary layers subject to surface pressure and temperature distributions, in *Proceedings of the Second Midwestern Fluid Mechanics Conference*, pp. 363-377. (1949).
15. S. LEVY, Heat transfer to constant-property laminar boundary-layer flows with power-function free-stream velocity and wall temperature variation, *J. Aeronaut. Sci.* 19, 341-348 (1952).
16. N. FÖSSLING, Calculation by series expansion of the heat transfer in laminar constant-property boundary-layers at nonisothermal surfaces, *Ark. Fys.* 14 (12), (1958).
17. C. R. GUHA and C. S. YIH, Laminar convection of heat from two-dimensional bodies with variable wall temperatures, in *Proceedings of the fifth Midwestern Fluid Mechanics Conference*, pp. 29-40 (1957).
18. E. M. SPARROW and J. B. STARR, The transpiration-cooled flat plate with various thermal and velocity boundary conditions, *Int. J. Heat Mass Transfer* 9, 508-510 (1966).
19. J. N. B. LIVINGOOD and P. L. DONOUGHE, Summary of laminar-boundary-layer solutions for wedge-type flow over convection- and transpiration-cooled surfaces, NACA TN 3588 (1955).
20. J. C. Y. KOH and J. P. HARTNETT, Skin friction and

- heat transfer for incompressible laminar flow over porous wedges with suction and variable wall temperature, *Int. J. Heat Mass Transfer* **2**, 185–198 (1961).
21. E. R. G. ECKERT, Die Berechnung des Wärmeübergangs in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper, *VDI ForschHft.* 416 (1942).
 22. E. J. WATSON, The asymptotic theory of boundary layer flow with suction, *ARC RM 2619* (1952).
 23. E. KAMKE, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. 1. Leipzig (1942).
 24. I. I. IMAI, On the heat transfer through laminar boundary layer with power function free stream velocity and wall temperature distributions, *Q. Appl. Math.* **16**, 33–45 (1958).
 25. B. PUNNIS, A remark on “On asymptotic solutions for the heat transfer at varying wall temperatures in a laminar boundary layer with Hartree’s velocity profiles”, *J. Aeronaut. Sci.* **20**, 505 (1953).
 26. H. E. FETTIS, On a differential equation occurring in the theory of heat flow in boundary layers with Hartree’s velocity profiles, *J. Aeronaut. Sci.* **21**, 132–133 (1954).
 27. T. N. STEVENSON, Laminar boundary layer with injection through a permeable wall, *Coll. Aeronautics, Rep. No. 145* (1961).
 28. E. W. ADAMS, Heat transfer in laminar flows of incompressible fluids with $Pr \rightarrow 0$ and $Pr \rightarrow \infty$, *NASA TN D-1527* (1963).
 29. M. J. LIGHTHILL, Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer, *Proc. R. Soc. A202*, 359–377 (1950).
 30. D. E. ROSNER, Fundamental solution to the diffusion boundary layer equations for separated flow over solid surfaces at very large Prandtl numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer* **6**, 793–804 (1963).
 31. G. W. MORGAN, A. C. PIPKIN and W. H. WARNER, On heat transfer in laminar boundary layer flow of liquids having a very small Prandtl-number, *J. Aerospace Sci.* **25**, 173–180 (1958).
 32. B. LE FUR, Convection de la chaleur en régime laminaire dans le cas d’un gradient de pression et d’une température de paroi quelconques, le fluid étant à propriétés physiques constantes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **1**, 68–80 (1960).
 33. R. NARASIMHA and S. S. VASANTHA, Laminar boundary layer on a flat plate at high Prandtl-number, *Z. Angew. Math. Phys.* **17**, 585–592 (1966).
 34. E. M. SPARROW and J. L. GREGG, Viscous dissipation in low Prandtl-number boundary layer flow, *J. Aerospace Sci.* **25**, 717 (1958).
 35. H. HOLSTEIN, Ähnliche laminare Reibungsschichten an durchlässigen Wänden, *ZWB-UM 3050* (1943).

ANHANG

Ebene Kanalströmung ($m = -1$; $\beta \rightarrow \infty$)

Der Spezialfall $m = -1$ erfordert eine Sonderbehandlung, weil dafür die Ähnlichkeitsvariable η nach Gleichung (7) nicht mehr definiert ist und

daher alle darauf aufbauenden Gleichungen ihre Gültigkeit verlieren. Die Außenströmung mit der Geschwindigkeit $U(x) = u_1/x$ entspricht der Strömung einer Potentialquelle und lässt sich nach Bild 9 als Strömung in einem divergenten Kanal (Diffusor) deuten. Führt man analog

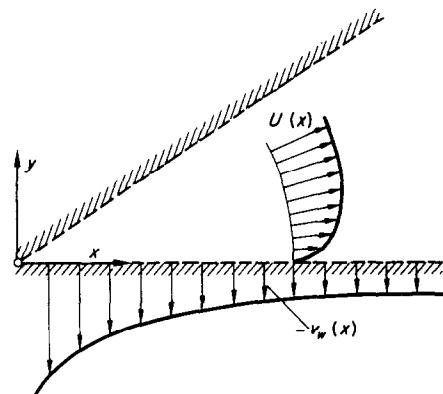


BILD 9. Strömung in einem divergenten Kanal (Diffusor) mit der Außenströmung $U(x) = u_1/x$ und Absaugung $v_w(x) = -\sqrt{[U(x)] v/x} k$.

zu Gleichung (7) die Ähnlichkeitsvariable

$$\bar{\eta} = y \sqrt{\left[\frac{U(x)}{vx} \right]} = \frac{y}{x} \sqrt{\left(\frac{u_1}{v} \right)} \quad (78)$$

ein, so ist mit den Ansätzen

$$u = U g(\bar{\eta}) = \frac{u_1}{x} g(\bar{\eta}) \quad (79)$$

$$v = -\sqrt{\left[\frac{U(x)}{x} \right]} [g(\bar{\eta}) \cdot \bar{\eta} + k] \quad (80)$$

die Kontinuitätsgleichung erfüllt und für die Funktion $g(\bar{\eta})$ gilt:

$$g'' + g^2 - 1 + kg' = 0 \quad (81)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\eta} = 0: \quad g(0) &= 0 \\ \bar{\eta} = \infty: \quad g(\infty) &= 1. \end{aligned} \quad (82)$$

Wie bereits Holstein [35] gezeigt hat, gibt es nur für Werte $k > 2\sqrt{2}/(2)$ Lösungen der Gleichung (81), die die geforderten Randbedingungen

erfüllen. Von Holstein wurden die Lösungen für die Werte $k = 2\sqrt{2}, 4, 6, 8$ und 10 numerisch berechnet.

Für die dimensionslosen Temperaturverteilungen entsprechend Gleichung (16) und Gleichung (17) folgt jetzt mit $\theta_I(\bar{\eta})$ und $\theta_{II}(\bar{\eta})$:

$$\theta_I'' + Pr k \theta_I' + Pr n g \theta_I = 0 \quad (83)$$

$$\theta_{II}'' + Pr k \theta_{II}' - 2 Pr g \theta_{II} = -Pr g^2 \quad (84)$$

$$\bar{\eta} = 0: \quad \theta_I(0) = 1 \quad \theta_{II}(0) = 0$$

$$\bar{\eta} = \infty: \quad \theta_I(\infty) = 0 \quad \theta_{II}(0) = 0.$$

Untersucht man die Gleichungen (83) und (84) auf das asymptotische Verhalten ihrer Lösungen hin, so ergeben sich nacheinander die folgenden Formeln:

1. $n = 0$:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = k Pr. \quad (85)$$

2. $n \gg 1$:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = -0,7290 [ng'(0) Pr]^{\frac{1}{2}}. \quad (86)$$

3. $Pr \rightarrow \infty$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = k Pr \quad (87)$$

$$\theta_{II}'(0) = Pr \int_0^{\infty} [g'(\bar{\eta})]^2 d\bar{\eta} \quad (88)$$

$$r = \frac{2}{k} \int_0^{\infty} [g'(\bar{\eta})]^2 d\bar{\eta} \quad (n = -2). \quad (89)$$

4. $Pr \rightarrow 0$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{(Re_x)}} = (-n Pr)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} Pr k \quad (90)$$

$$\theta_{II}'(0) = Pr \int_0^{\infty} [g'(\bar{\eta})]^2 d\bar{\eta} \quad (91)$$

$$r = 2 \frac{Pr \int_0^{\infty} [g'(\bar{\eta})]^2 d\bar{\eta}}{\sqrt{(2Pr) + \frac{1}{2} Pr k}} \quad (n = -2). \quad (92)$$

Abstract—The incompressible laminar boundary layer for wedge type outer flow velocity distributions $U(x) = u_1 x^m$ ($-1 < m < \infty$) including continuous suction or blowing is considered. Taking into account frictional heat and assuming $T_w(x) - T_\infty = T_w x^n$ as wall temperature distribution the heat flux at the wall $q(x, m, C, n, Pr, Ec)$ has been calculated, where C determines the normal velocity at the wall ($C > 0$ suction; $C < 0$ blowing). Pr refers to Prandtl number and $Ec = u_1^2/c_p T_w$ to Eckert number. Many numerical results as well as asymptotic formulae for the limiting cases of low and high Prandtl numbers are given. The meaning of the recovery factor for variable wall temperatures is discussed. The special case $n = 2m$, for which the temperature field leads to self-similar solutions, is considered in detail. For $m = -1$ the results are summarized in the Appendix.

Résumé—La couche limite laminaire incompressible pour des distributions de vitesse d'écoulement extérieur du type dièdre $U(x) = u_1 x^m$ ($-1 \leq m < \infty$) est considérée en incluant l'aspiration ou le soufflage continu. En tenant compte de la chaleur de frottement et en supposant comme distribution de température pariétale $T_w(x) - T_\infty = T_w x^n$, le flux de chaleur pariétal $q(x, m, C, n, Pr, Ec)$ a été calculé, où C détermine la vitesse normale à la paroi ($C > 0$ aspiration; $C < 0$ soufflage). Pr est le nombre de Prandtl et $Ec = u_1^2/c_p T_w$ le nombre d'Eckert. De nombreux résultats numériques sont donnés ainsi que des formules asymptotiques dans les cas limites des nombres de Prandtl faibles et élevés. La signification du facteur pariétal de frottement pour des températures pariétales variables est discutée. Le cas spécial $n = 2m$, pour lequel le champ de température conduit à des solutions en similitude, est considéré en détail. Pour $m = -1$, les résultats sont résumés dans l'annexe.

Аннотация—Рассматривается несжимаемый ламинарный пограничный слой при распределении скоростей типа (внешнее обтекание клина): $U(x) = u_1 x^m$ ($-1 > m < \infty$) при непрерывном отсосе или вдуве. Учитывая теплоту трения и полагая, что $T_w(x) - T_\infty = T_w x^n$ есть распределение температуры в стенке, рассчитывается тепловой поток на стенке $q(x, m, C, n, Pr, Ec)$, где C -нормальная составляющая скорости на стенке ($C > 0$ при отсосе, $C < 0$ при вдуве). Pr — число Прандтля и $Ec = u_1^2/c_p T_w$ — число Эккерта. Приводятся многочисленные численные результаты, а также асимптотические формулы

для предельных⁴ случаев малых и больших чисел Прандтля. Обсуждается значение коэффициента восстановления для переменных температур стени. Детально рассматривается частный случай $n = 2m$, в котором температурное поле приводит к автомодельным решениям. Для $m = -1$ результаты приводятся в Приложении.